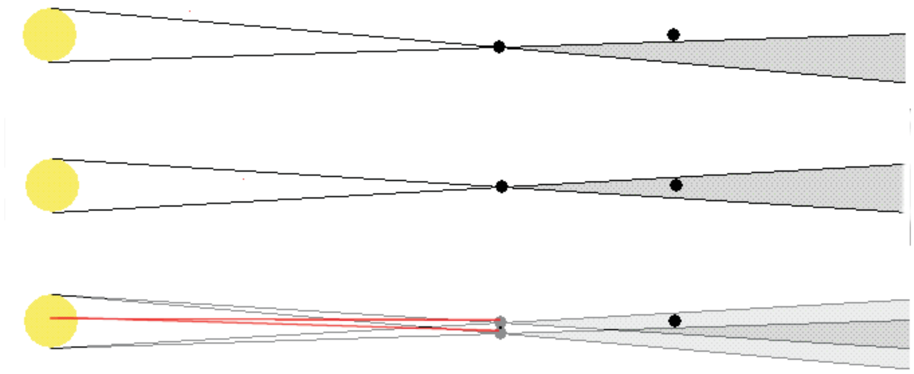

Abbildung 1: Beim Venustransit ergibt sich zu einem bekannten Winkel eine messbare Länge, z.B. der Durchmesser der Erde.

Ableitung der Sonnenentfernung durch Kontaktzeitmessungen beim Venustransit

Udo Backhaus

4. September 2012

1 Prinzip

Die Messung der Astronomischen Einheit durch Kontaktzeitmessungen beim Venustransit beruht auf folgender Grundidee:

Im Sonnensystem sind alle Winkel und alle Winkelgeschwindigkeiten bekannt. Jedoch ist zu keinem dieser Winkel die gegenüber liegende Länge bekannt. Gelingt es, bei nur einem Planeten zu einem Zentralwinkel die zugehörige Bogenlänge zu messen, dann kennt man seine Entfernung zur Sonne – und damit alle Entfernungen.

Bei einem Venustransit wird die Erde von dem Schatten getroffen, den Venus bei ihrem Umlauf um die Sonne in den Weltraum wirft. Wenn es gelingt, die Geschwindigkeit v_{Sch} dieses Schattens relativ zur Erde in absoluten Einheiten (z.B. km/s oder Erdradien/min) zu messen, dann kann man einem bekannten Winkel, den Venus in einer bestimmten Zeit auf ihrer Bahn um die Sonne überstrichen hat, die zugehörige Bogenlänge auf der Erde zuordnen.

Wenn man z.B. den Zeitpunkt t_1 misst, an dem die Erde zum ersten Mal von dem Schatten getroffen wird (Beginn des 1. Kontakts, Abb. 1, oben), und den Zeitpunkt t_2, zu dem sie ganz in den Schatten eingetaucht ist (Ende des 1. Kontakts, Abb. 1, Mitte), dann beträgt zu dem bekannten Zentralwinkel $\omega(t_2 - t_1)$ (in Abb. 1, unten, rot hervorgehoben) gerade zwei Erdradien. Also

$$\omega \Delta t = \omega(t_2 - t_1) = \frac{2R_E}{r_E} \quad \Longrightarrow \quad \beta_S = \frac{R_E}{r_E} = \frac{1}{2}\omega \Delta t_{ges} \tag{1}$$

Vernachlässigt man die Neigung der Venusbahn gegen die Ekliptik, dann überstreicht der Venusschatten die Erde zentral, und die in Gleichung (2) auftretende Winkelgeschwindigkeit ω ist einfach die synodische Winkelgeschwindigkeit der Venus bzgl. der Erde: $\omega = \omega_{syn} = \omega_{Venus} - \omega_{Erde}$.

Kennt man den Abstand Erde-Sonne r_E als Vielfaches der Astronomischen Einheit – und das ist ein Ergebnis der Ephemeridenrechnung! –, dann kann man den aktuellen Parallaxenwinkel β_S in die Sonnenparallaxe π_S umrechnen, die sich auf $r_E = 1AE$ bezieht:

$$\pi_S = \frac{R_E}{AE} = \frac{R_E}{r_E}\frac{r_E}{AE} = \beta_S \frac{r_E}{AE} = \omega_{syn}\frac{\Delta t_{ges}}{2}\frac{r_E}{AE} \tag{2}$$

2 Verfeinerungen

2.1 1. Verfeinerung: Berücksichtigung der Neigung der Venusbahn

Da die Venusbahn gegen die Ekliptik geneigt ist, streicht der Venusschatten, anders als bisher angenommen, nicht zentral über die Erde hinweg (Abb. 2). Dadurch ist die Winkelgeschwindigkeit der Schattenkante relativ zur Erde kleiner als in (2) angenommen, der Zusammenhang zwischen der Zeitdifferenz Δt und dem Abstand zwischen Erde und Sonne r_E komplizierter.

Ändert man die Perspektive und betrachtet die Wanderung der Erde durch den Schatten der Venus, dann bewegt sich die Erde, während sie ganz von der Schattenkante überstrichen wird, von Position 1 nach Position 2 (Abb. 3). Mit Hilfe der Ephemeridenrechnung lassen sich anhand von Abbildung 3 – ohne Kenntnis der Astronomischen Einheit! – berechnen:

- der Radius des Venusschattens im Abstand der Erde von der Sonne $R_{Schatten}$ in AE,
- der „Stoßparameter“ p in AE[1] und
- die Geschwindigkeit v, mit der sich Erde und Schatten relativ zueinander bewegen, in AE/min.

Nicht bekannt dagegen ist zunächst das Größenverhältnis zwischen Venusschatten und Erde. Wenn jedoch die Zeit Δt_{ges} gemessen wird, die die Erde benötigt um von 1 nach 2 zu kommen[2], dann ist der Abstand

[1] Wenn zu einem Zeitpunkt die Position $\vec{R}_E$ der Erde relativ zum Schattenmittelpunkt und ihre Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ bekannt sind, dann erhält man p, indem man vom Schattenmittelpunkt aus das Lot auf die Richtung von $\vec{v}$ fällt.

[2] In dieser Zeitspanne wandert der Schattenrand ganz über die Erde.

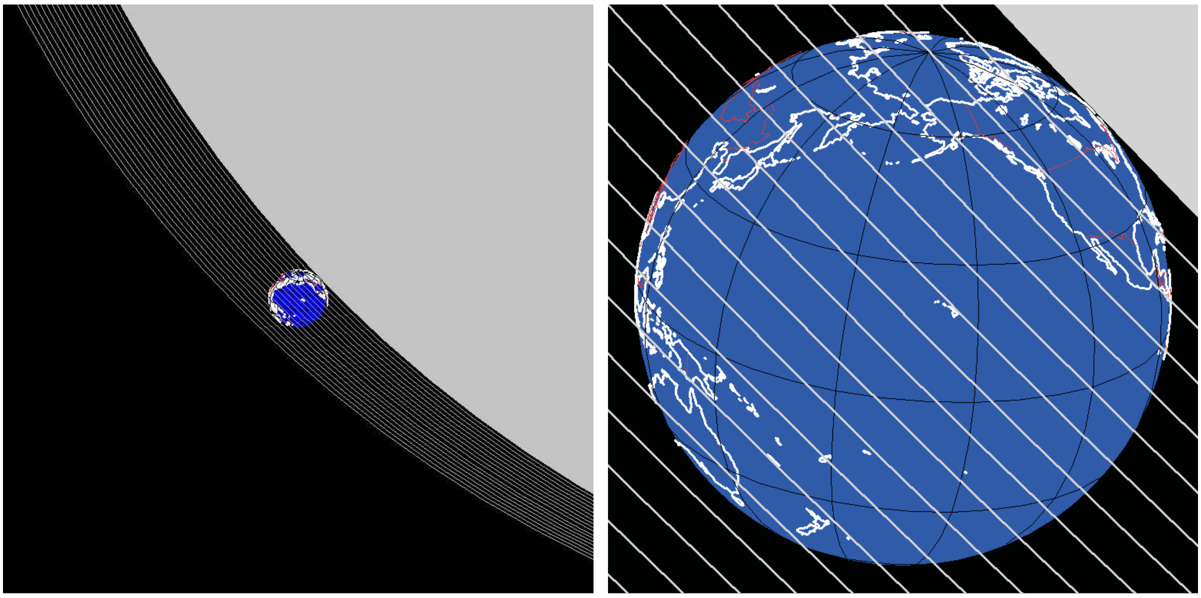

Abbildung 2: Der Venusschatten trifft die Erde exzentrisch. Die Linien markieren die Schattenpositionen in Abständen von einer Minute.

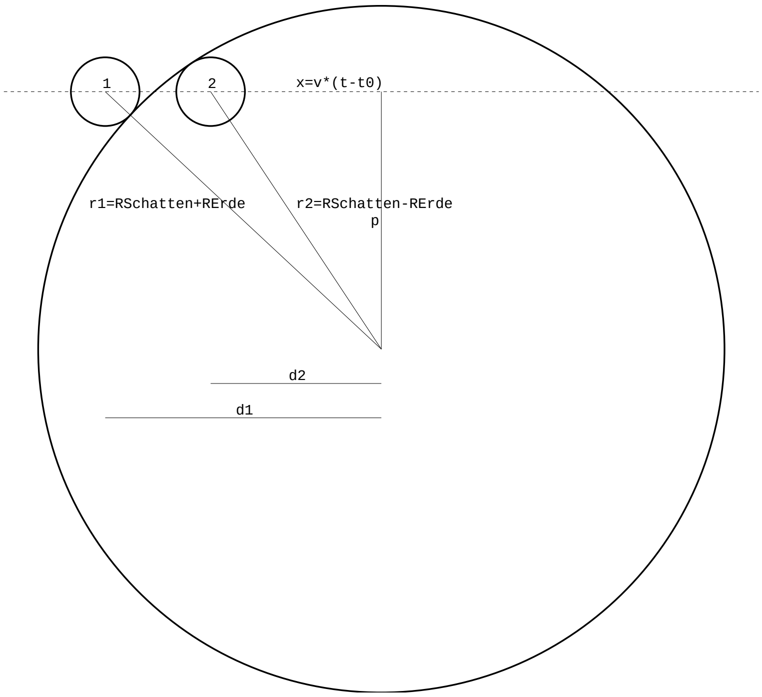

Abbildung 3: Perspektivwechsel: Die Erde tritt in den Venusschatten ein.

$$\Delta d = d_1 - d_2 = v\Delta t_{ges}$$

in AE bekannt. Daraus lässt sich folgendermaßen die Größe der Erde in AE, d. h. die Sonnenparallaxe, berechnen:

$$\begin{aligned}
r_1 = R_{Schatten} + R_E \quad \wedge \quad r_2 = R_{Schatten} - R_E \\
d_1^2 = r_1^2 - p^2 \quad \wedge \quad d_2^2 = r_2^2 - p^2 \\
\Longrightarrow \quad d_1^2 - d_2^2 \quad = \quad r_1^2 - r_2^2 \\
\Longrightarrow \quad (d_1 + d_2)(d_1 - d_2) \quad = \quad (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 2R_{Schatten} \cdot 2R_E
\end{aligned} \tag{3}$$

Da die Erde viel kleiner ist als der Venusschatten (das war vor Kenntnis der AE bekannt), kann näherungsweise gesetzt werden:

$$d_1 + d_2 \quad \approx \quad 2d = 2\sqrt{R_{Schatten}^2 - p^2}$$

Damit folgt aus (3)

$$\begin{aligned}
\sqrt{R_{Schatten}^2 - p^2}\Delta d \quad &= \quad 2R_{Schatten} R_E \quad \Longrightarrow \\
R_E \quad &= \quad \sqrt{R_{Schatten}^2 - p^2}\frac{v\Delta t_{ges}}{2R_{Schatten}},
\end{aligned}$$

und der Erdradius R_E ist als Bruchteil der AE bekannt – und damit die Sonnenparallaxe π_S[3]:

$$R_E = \frac{v}{2}\Delta t_{ges}\sqrt{1 - \frac{p^2}{R_{Schatten}^2}}$$

oder

$$\boldsymbol{\pi_S = \frac{R_E}{AE} = \frac{v}{AE}\frac{\Delta t_{ges}}{2}\sqrt{1 - \frac{p^2}{R_{Schatten}^2}}} \tag{4}$$

Diese Gleichung ist die Verallgemeinerung von (2).

2.2 2. Verfeinerung: Linearisierung

Die Zeitdauer Δt_{ges} des Schattendurchganges kann nicht direkt gemessen werden, weil an den entsprechenden Orten auf der Erde die Sonne gerade auf- bzw. untergeht, also direkt am Horizont steht. Außerdem wäre der Vergleich zweier Einzelmessungen nicht genau genug. Deshalb misst man den Moment des Schattendurchganges, den so genannten

[3] Anders als bei Gleichung (2) muss hier nicht auf $r_E = 1AE$ reduziert werden, weil die Geschwindigkeit des Venusschattens bereits in AE/min vorliegt!

Kontaktzeitpunkt, an vielen Orten auf der Erde. Bei der Berechnung des Zusammenhanges zwischen der geografischen Position der Beobachter und der von ihnen gemessenen Kontaktzeiten muss allerdings berücksichtigt werden, dass die Erde eine Kugel ist und der Schatten deshalb nicht gleichförmig über ihre Oberfläche wandert.

Zur Berechnung dieses Zusammenhanges werden die Koordinaten der Beobachter so transformiert, dass sich ein linearer Zusammenhang mit den zu erwartenden Kontaktzeiten ergibt. Dabei werden folgende Idealisierungen gemacht[4]:

1. Während der ca. 15 Minuten des Schattendurchganges wird von der Erddrehung abgesehen.

2. Die Schattenfront wird als geradlinig angenommen. Tatsächlich ist sie natürlich kreisförmig. Allerdings ist dieser Kreis mehr als 40-mal so groß wie die Erde. Tatsächlich wurde die Abbildung 2 rechts mit maßstabsrichtigen Schattenkreisen gezeichnet.

3 Drehung des Koordinatensystems

Zunächst werden aus den geografischen Koordinaten (λ, φ) der Beobachtungsorte die zugehörigen rechtwinkligen Koordinaten $\vec{r}$ berechnet:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_E \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ cos\lambda \end{pmatrix} \tag{5}$$

Dabei ist das Koordinatensystem ist so orientiert, dass die z-Achse durch den Nordpol der Erde, die x-Achse durch den Längengrad von Greenwich geht. In den folgenden Abbildungen zeigt die x-Achse nach rechts, die y-Achse nach hinten und die z-Achse nach oben. Abbildung 4 zeigt links die „Grundstellung“ der Erde. Da sie gegenüber der Mittagszeit von Greenwich um 90° gedreht ist, zeigt sie die Tagseite der Erde um 18.00 Uhr UT.

Die Koordinaten sollen so transformiert werden, dass der Schattenrand genau von rechts kommt (Abb.4 rechts) und dadurch ein linearer Zusammenhang zwischen den transformierten x-Koordinaten der Beobachtungsorte und den bei ihnen gemessenen Kontaktzeiten besteht.

1. Rotation Für die Grundstellung der Erde wird als Zeitpunkt das Datum des letzten Frühlingsanfangs um 18 Uhr UT angenommen. Zunächst wird deshalb die Erde entsprechend der seitdem verstrichenen Zeit $\Delta t_{Tr} = jd - jd_0$ um die z-Achse gedreht (Abb. 5 oben links). Diese Drehung wird durch die folgende Gleichung beschrieben[5]:

[4] Die erste Idealisierung könnte vermieden werden, indem zu jedem Messzeitpunkt die Drehung der Erde gesondert berechnet wird. Die zweite ließe sich nur iterativ üb, da der Radius des Venusschattens als Vielfaches des Erdradius zunächst unbekannt ist.

[5] Mit $\mathbf{D}_x(\alpha)$, $\mathbf{D}_y(\beta)$, $\mathbf{D}_z(\gamma)$ werden die Drehmatrizen bezeichnet, die Drehungen um die x- (y-, z-) Achse um den Winkel α (β, γ) vermitteln. Es gilt

$$\mathbf{D}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \mathbf{D}_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \mathbf{D}_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

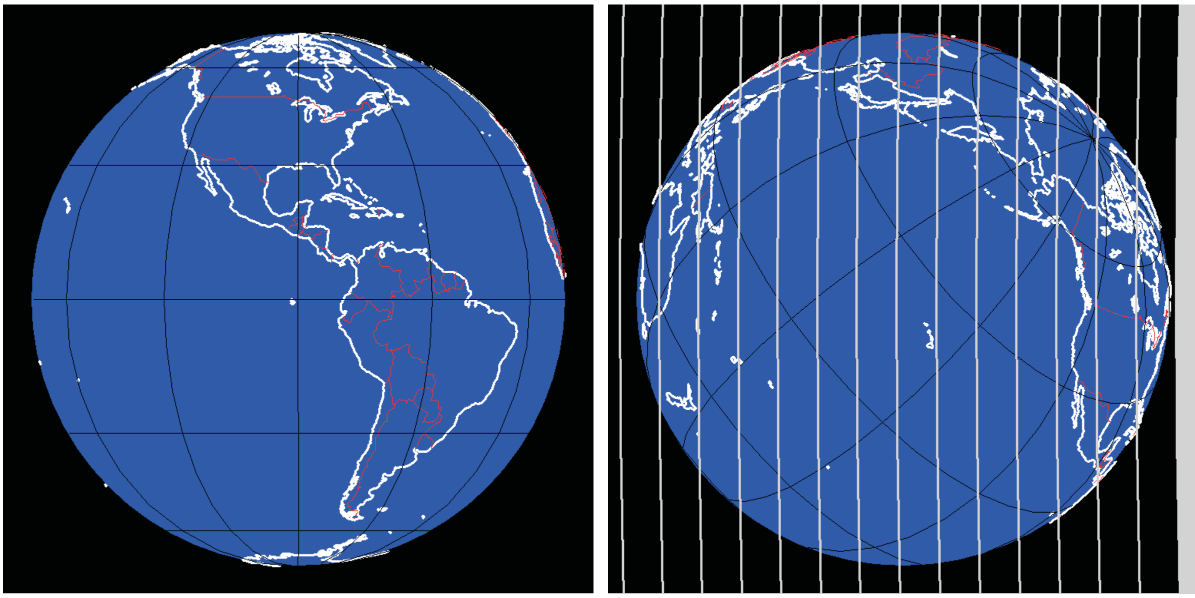

Abbildung 4: Drehung der Erdkugel aus der „Grundstellung“ (links) in die gewünschte Endstellung (rechts). Die x-Achse zeigt nach rechts, die z-Achse nach oben.

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \mathbf{D}_1 \vec{r} \\ \text{mit} \qquad \mathbf{D}_1 &= \mathbf{D}_z(\Delta t_{Tr} * 1.002738 * 2\pi) \end{aligned} \tag{6}$$

Dabei sind jd_0 und jd die julianischen Daten des Ausgangs- und des Transitzeitpunktes. Der Faktor 1.002738 berücksichtigt die Tatsache, dass die Rotationsperiode der Erde kleiner als 24 Stunden ist.

2. Rotation Mit der zweiten Drehung um die y-Achse wird die Rotationsachse der Erde in ihre (von der Sonne aus gesehene) Stellung zu Frühlingsbeginn gedreht (Abb. 5 oben rechts):

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= \mathbf{D}_2 \vec{r}_1 \\ \text{mit} \qquad \mathbf{D}_2 &= \mathbf{D}_y(\varepsilon) \end{aligned} \tag{7}$$

(ε: Schiefe der Ekliptik)

3. Rotation Zwischen Frühlingsanfang und Transitzeitpunkt wendet sich der Nordpol durch die Bahnbewegung der Erde, d. h. entsprechend der ekliptikalen Länge λ_{Sonne} der Sonne, immer weiter der Sonne zu. Mit der dritten Drehung muss also das Koordinatensystem um diese Länge um die z-Achse gedreht werden (Abb. 5 links unten).

$$\begin{aligned} \vec{r}_3 &= \mathbf{D}_3 \vec{r}_2 \\ \text{mit} \qquad \mathbf{D}_3 &= \mathbf{D}_z(-\lambda_{Sonne}) \end{aligned} \tag{8}$$

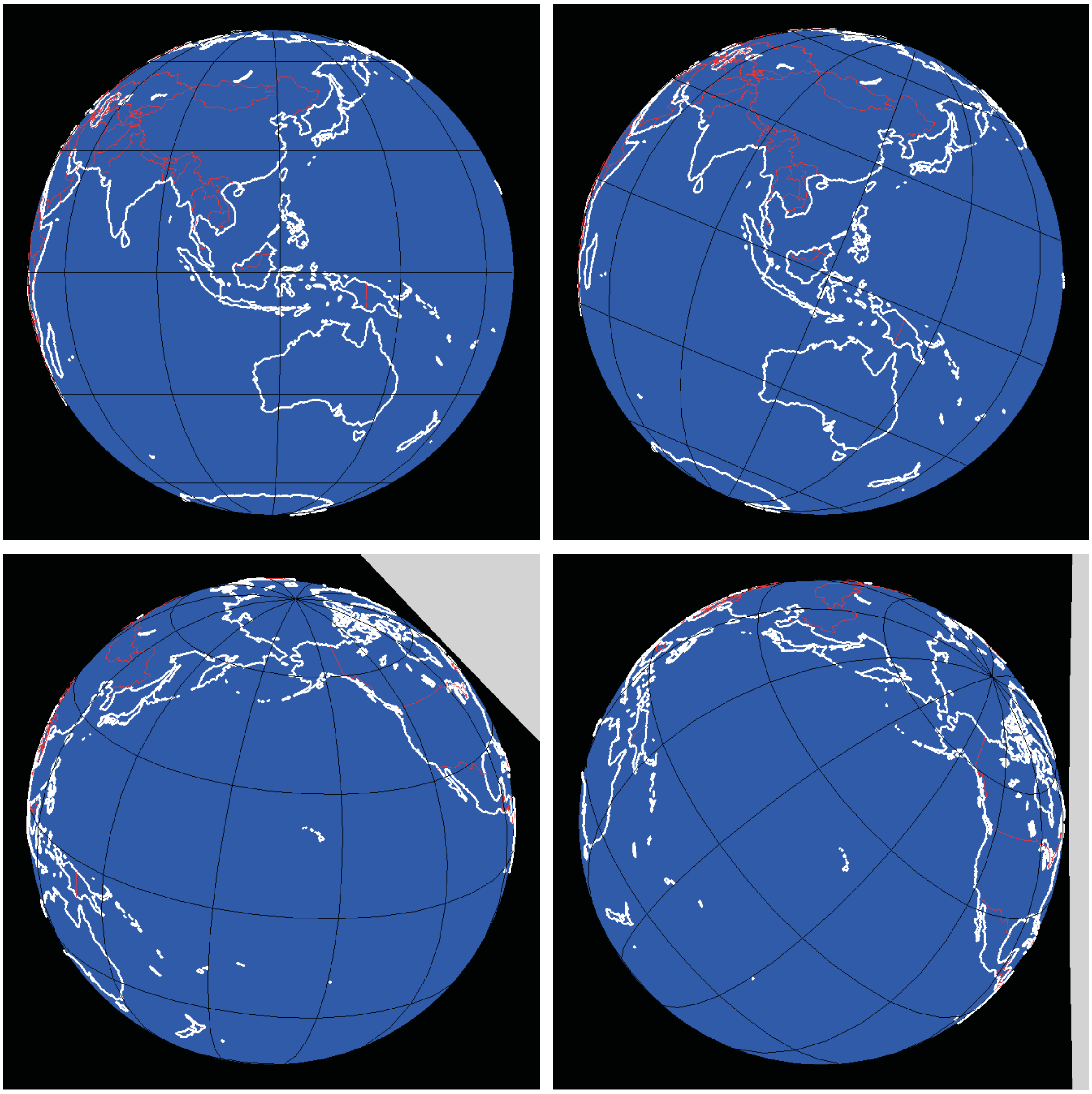

Abbildung 5: Drehungen der Erdkugel: **oben links**: nach Drehung des Originals um die z-Achse entsprechend der seit dem Tag des Frühlingsanfangs um 18 Uhr UT verstrichenen Zeit.), **oben rechts**: nach zusätzlicher Drehung um die y-Achse entsprechend der Neigung der Erdachse, **unten links**: nach zusätzlicher Drehung um die z-Achse entsprechend der Bahnbewegung der Erde seit Frühlingsbeginn, **unten rechts**: nach zusätzlicher Drehung um die y-Achse, sodass er Venusschatten genau von rechts kommt.).

In dieser Darstellung kommt der Venusschatten, entsprechend der positiven ekliptikalen Breite β_V der Venus und ihrer im Vergleich zur Erde noch kleineren heliozentrisch ekliptikalen Länge λ_V von rechts oben (vgl. Abb. 2).

4. Rotation Wenn das Koordinatensystem um den Winkel

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\beta_V}{\lambda_E - \lambda_V}\right) \tag{9}$$

um die y-Achse gedreht wird, kommt schließlich der Schattenrand genau von rechts (Abb. 5 unten rechts, vgl. Abb. 4 rechts).

$$\begin{aligned} \vec{r}_4 &= \mathbf{D}_4\vec{r}_3 \\ \text{mit} \qquad \mathbf{D}_4 &= \mathbf{D}_y(\alpha) \end{aligned} \tag{10}$$

Die erforderliche Koordinatentransformation wird also durch vier nacheinander ausgeführte Drehungen erreicht:

$$\vec{r}_4 = \mathbf{D}\vec{r} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \qquad \mathbf{D} &= \mathbf{D}_4\mathbf{D}_3\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 \\ &= \mathbf{D}_y(\alpha)\mathbf{D}_z(-\lambda_{Sonne})\mathbf{D}_y(\varepsilon)\mathbf{D}_z(\Delta t_{Tr} * 1.002738 * 2\pi) \end{aligned} \tag{12}$$

4 Konkretisierung des Algorithmus

4.1 Zahlenwerte

Am 5. Juni 2012 gelten für den 1./2. Kontakt folgende Zahlenwerte[6]:

$$\begin{aligned} \text{Frühlingsanfang} &: \text{20. März 2012} \\ \Delta t_{Tr} &= 77.218056d \\ \varepsilon &= 23.4^\circ \\ \lambda_{Sonne} &= 75.6^\circ \\ \alpha &= 44.7^\circ \end{aligned}$$

Mit diesen Angaben lässt sich die Drehmatrix (12) berechnen:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4018 & -0.5716 & 0.7155 \\ 0.9094 & 0.1569 & -0.3853 \\ 0.1080 & 0.8054 & 0.5828 \end{pmatrix} \tag{13}$$

[6]Genauer: Es werden die Zahlenwerte für 22.14 UT angegeben, für den Zeitpunkt, an dem der Schatten die Erde gerade halb bedeckt.

Die Transformation der Ortskoordinaten wird demnach vermittelt durch:

$$\begin{aligned} x &= D_{11}\cos\varphi\cos\lambda + D_{12}\cos\varphi\sin\lambda + D_{13}\sin\varphi \\ &= 0.4018\cos\varphi\cos\lambda - 0.5716\cos\varphi\sin\lambda + 0.7155\sin\varphi \end{aligned} \tag{14}$$

Für die Berechnung der Sonnenparallaxe gemäß (4) müssen noch der Radius $R_{Schatten}$ des Venusschatten in Erdentfernung von der Sonne, der minimale Abstand p zwischen der Erde und der Schattenmitte und die Relativgeschwindigkeit v zwischen Schatten und Erde mit Hilfe der Ephemeridenrechnung bestimmt werden. Es ergibt sich:

$$R_{Schatten} = 0.001850AE \tag{15}$$
$$p = 0.5904R_{Schatten} \tag{16}$$
$$v = 0.000471AE/h \tag{17}$$

Am 6. Juni 2012, 4.345 UT, gelten für den 3./4. Kontakt folgende Zahlenwerte:

$$\begin{aligned} \Delta t_{Tr} &= 77.482292d \\ \varepsilon &= 23.4^\circ \\ \lambda_{Sonne} &= 75.9^\circ \\ \alpha &= 27.7^\circ \end{aligned}$$

Mit diesen Angaben lässt sich die Drehmatrix (12) berechnen:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.9378 & 0.0662 & -0.3407 \\ 0.0752 & -0.9195 & -0.3857 \\ -0.3388 & -0.3874 & 0.8574 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Die Transformation der Ortskoordinaten wird demnach vermittelt durch:

$$\begin{aligned} x &= D_{11}\cos\varphi\cos\lambda + D_{12}\cos\varphi\sin\lambda + D_{13}\sin\varphi \\ &= -0.9378\cos\varphi\cos\lambda + 0.0662\cos\varphi\sin\lambda - 0.3407\sin\varphi \end{aligned} \tag{19}$$

4.2 Realisierung als Tabellenblatt

Der beschriebene Algorithmus wird auf dem Tabellenblatt `calculation` der Exceltabellen `evaluationofcontacttimes1+2.xls` bzw. `evaluationofcontacttimes3+4.xls` ausgeführt. Die Konstanten D_{11}, D_{12} und D_{13} stehen dort in den Zellen B5-B7, die Parameter (16), (17) und (15) in den Zellen E5-E7.

Die Berechnung der Sonnenparallaxe nach Gleichung (4) erfolgt in den Zeilen 19-21. Dabei wird für die Steigung $\frac{\Delta t_{ges}}{2R_E}$ der Geraden entweder der Differenzenquotient eingesetzt, der sich aus zwei Beobachtungen ergibt, oder die Steigung der Ausgleichsgeraden für alle Messergebnisse.